

クオークが重い領域の QCD における臨界点探索

金谷 和至[†]

筑波大学 数理物質系 宇宙史研究センター

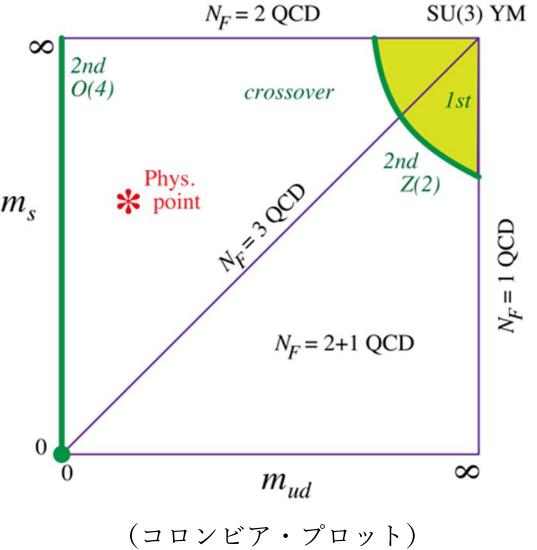
1. はじめに

クオークは、通常は陽子・中性子などのハドロンの中に閉じ込められるが、1兆度以上の超高温では、ハドロンから溶け出してクオーク・グルオン・プラズマ状態に相転移すると考えられている。この高温クオーク・ハドロン物質の相転移と熱力学特性を、クオークの基礎理論である QCD から直接解明することは、宇宙の初期進化、中性子星の内部構造、高エネルギー重イオン衝突実験の理解などにおいて極めて重要である。

QCD の相構造は、相転移次数がクオーク質量でどう変わるかをまとめた「コロンビア・プロット」により議論される。図 1 に、最新の格子研究結果を踏まえた、密度ゼロの場合のコロンビア・プロットを示す。横軸は u,d クオーク質量で、縦軸は s クオーク質量。右上の端は、全てのクオークが質量無限大でデカップルした SU(3) 純ゲージ理論（クエンチ近似 QCD）で、相転移次数はここでは 1 次である。クオークが重い極限からクオーク質量を下げるとき、相転移次数は 1 次からクロスオーバーに変化する。両者の境界（図 1 右上の緑の曲線）が、重クオーク領域における QCD 臨界点である。図の上端は、 s クオークだけがデカップルした 2 フレーバー QCD で、 ud クオークが軽い極限（カイラル極限）で相転移は $O(4)$ ユニバーサリティー・クラスに属する 2 次転移となる。赤い星印が物理点で、ここでは連続的なクロスオーバーである。以前は左下の端（3 フレーバーのカイラル極限）近傍にも 1 次相転移領域が拡がっていたと考えられていたが、近年の格子シミュレーションにより、臨界点がカイラル極限まで後退していることが強く示唆されている。他方、重クオ

ーク領域の臨界点の位置については、空間サイズ依存性や格子間隔依存性があり、確定していない。

図 1 : QCD の有限温度相転移次数



(コロンビア・プロット)

現実のクオーク質量（物理点）での QCD 相転移は連続的なクロスオーバーだが、そこでの熱力学的性質が近傍の臨界点による臨界スケーリングの影響を受けている可能性がある。特に、カイラル極限側の臨界点が以前考えられていたより遠いので、クオークが重い側の臨界点の解明が重要になっている。

熱力学極限（格子サイズ無限大極限）における臨界点を決定する上で最も強力な方法は、Binder cumulant B_4 を用いた有限サイズスケーリング (FSS) だが、空間サイズが十分大きい必要がある。我々は、クオークが重い QCD を、空間サイズを先行研究より大きく拡大したシミュレーションを実行し、臨界点を研究した[1-5]。

[†] 課題メンバー：江尻信司（新潟大）、北澤正清（京大基研）、菅原寛人（新潟大）、鈴木博（九州大）

2. 重クォーク QCD シミュレーション

大きな格子サイズで高統計シミュレーションを実現するために、我々は、重いクォークの効果をホッピングパラメータ展開(HPE)で取り入れる方法を開発した[5,6]。ホッピングパラメータ κ はクォーク質量の逆数に比例し、HPE は重クォーク展開である。

論文[6]では、HPE の基本的性質を、収束性が最も悪い場合について半解析的に研究し、HPE がカイラル極限まで必ず収束することを示した。また、HPE を有限次数で切った場合の誤差の上限を κ の関数として評価して、温度軸方向の格子サイズが $N_t = 4$ の場合の臨界点 κ_c 近傍までなら最低次(LO)で十分だが、連続極限に向けて N_t を大きくすると κ_c も大きくなるので、 $N_t = 6$ では κ_c 近傍でその次の次数(NLO)まで必要で、 $N_t = 8$ ではさらに高次項まで取り入れる必要があることを示した。

$$\begin{aligned} S_G &\sim \square \\ S_{\text{LO}} &\sim \square + (\square) \\ S_{\text{NLO}} &\sim \square | \square + \square \square + \square \square + (\square) \end{aligned}$$

図 2 : HPE のゼロ次(純ゲージ理論)、最低次(LO)、その次の次数(NLO)における有効作用。

LO 重クォーク QCD のシミュレーション・コードは、クエンチ QCD と同様にベクトル化・並列化可能で、計算時間をフル QCD シミュレーションより 2 枠以上削減できる[5]。 $N_t = 4$ の場合を研究した論文[5]では、LO 重クォーク QCD でシミュレーションを実行し、NLO の効果を取り入れ、NLO の影響が小さいことを確認した。

HPE 高次項の数値的評価は次数とともに急速に難しくなる。 $N_t \geq 8$ で直面するこの問題を解決するために、論文[6]ではさらに、HPE の高次項を LO や NLO の重クォーク QCD に有効的に取

り入れる手法を開発した。

B_4 の解析では、 κ などの結合パラメータを連続的に変化させることも重要である。そのためには、我々は、multi-point reweighting 法[7-9]による解析を実行した。

3. 重クォーク QCD の臨界点

3.1 $N_t = 4$

以下では、特に断らない限り、2 フレーバー QCD の結果を示す。図 3 に $N_t = 4$ 格子でのポリアコフ・ループの B_4 を示す[5]。系の空間サイズはアスペクト比 $LT = N_s/N_t$ でコントロールする(臨界点探索では温度 $T = 1 / (aN_t)$ が臨界温度近傍でほぼ一定なので、 LT は空間サイズ $L = aN_s$ に比例する。ここで N_s, N_t は空間方向、温度軸方向の格子サイズで、 a は格子間隔)。図 2 より、 B_4 が 1 点で交差するためには、先行研究では到達できていない $LT \geq 9$ の大格子が必要であることがわかる。 $LT = 9 \sim 12$ を使った FSS フィットにより、臨界指数が期待される $Z(2)$ ユニバーサリティと矛盾しないことを確認し、その交点から κ_c を高精度に決定した。

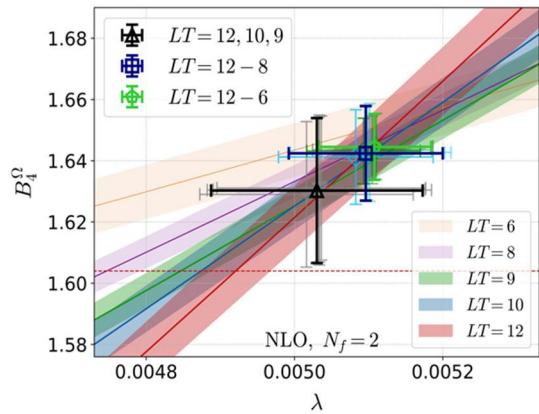


図 3 : $N_t = 4$ における重クォーク QCD の Binder cumulant のクォーク質量依存性[5]。 $\lambda = 48N_fN_t\kappa^4$ はクォークが軽くなると大きくなるパラメータ。縦横の誤差棒が付いた十字のデータ点は、FSS フィットによる交点の評価結果。

3.2 $N_t = 6$

図 4 に $N_t = 6$ の中間結果を示す[1]。 $N_t = 4$ の場合と定性的に似た振る舞いだが、格子間隔が小

さくなると空間サイズが小さい格子での FSS からのずれが大きくなる傾向が見て取れ、 $N_t = 6$ では FSS を実現するために $N_t = 4$ より大きな $LT \geq 10$ が必要である。 $LT = 10 \sim 15$ で FSS フィットし、さらに[6]の方法で HPE の 22 次まで取り入れて、 κ_c の精密な評価に成功した。

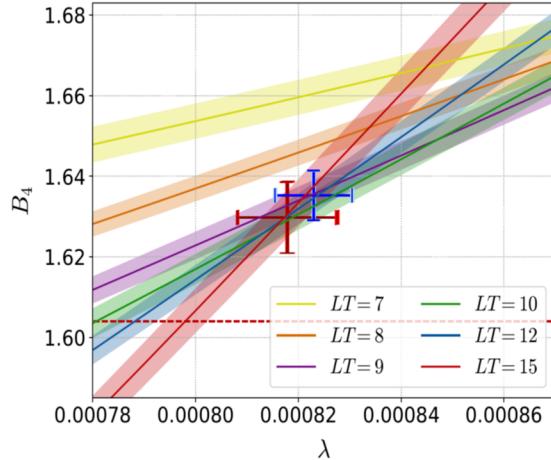


図 4 : $N_t = 6$ における Binder cumulant の中間結果[1]。赤い十字は $LT = 10 \sim 15$ 、青は $LT = 9 \sim 15$ を用いた FSS フィットによる交点の結果。

4. 今後の展開

$N_t = 8$ でもシミュレーションを進めている。まだ解析途中だが、 $N_t = 4, 6$ と同様の中間結果を得ている。さらに連続極限に近づけた $N_t = 10$ のシミュレーションも計画している。

N_t を増やして連続極限を議論する場合、 κ_c の変化を物理量の変化に翻訳する必要がある。そこで、 κ_c におけるゼロ温度での擬スカラーメソンと相転移温度の比 m_{PS}/T_c を計算したところ、 $N_t = 4, 6, 8$ でそれぞれ $m_{PS}/T_c = 16.30(3), 18.04(4), 17.2(2)$ という暫定的結果を得た。これによると N_t 依存性（格子間隔依存性）は小さいと思われるが、もう一点違う N_t の結果があれば連続極限が明らかになると期待される。

以上では、2 フレーバー QCD の場合における臨界点の結果について説明してきたが、HPEに基づく我々の方法は、任意のフレーバー数で、またクォーク質量が縮退していない場合でも、臨界点を求めることができる[6,7]。

さらに、我々の方法は有限密度にも容易に拡張できることを論文[2]で議論した。フル QCD では非常にコストがかかるクォーク行列式の複素位相の計算も、HPE による方法では簡単に評価でき、少なくとも我々が解析した N_t の重クォーク領域の臨界点付近では符号問題が深刻でなく、再重み付け法により有限密度での臨界点を求められることが分かった。その結果、図 5 に示すように、重クォーク QCD の一次相転移領域が、密度が高くなるにつれて小さくなることを定量的に示した[2]。有限密度 QCD のさらなる解析を進めている。

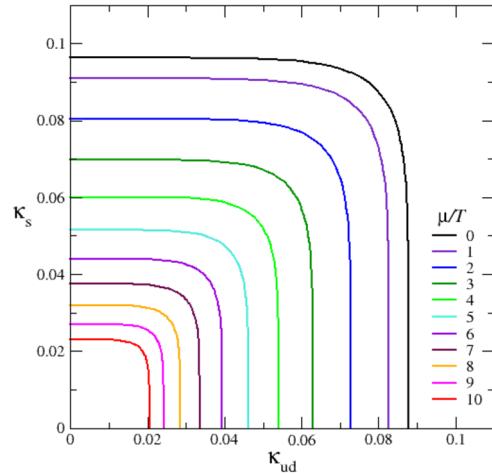


図 5 : $N_t = 6$ で計算した 2+1 フレーバー有限密度 QCD の各 μ/T での (κ_{ud}, κ_s) 平面上における一次相転移の境界線 [2]。

参考文献

- (1) M. Kitazawa, R. Ashikawa, S. Ejiri, K. Kanaya, H. Sugawara, “Critical point in heavy-quark region of QCD on fine lattices,” PoS (LATTICE 2023), 190 (2024), DOI:10.22323/1.453.0190
- (2) S. Ejiri, K. Kanaya, M. Kitazawa, “Chemical potential dependence of the endpoint of first-order phase transition in heavy-quark region of finite-temperature lattice QCD,” PoS (LATTICE 2023), 174 (2024), DOI:10.22323/1.453.0174
- (3) K. Kanaya, R. Ashikawa, S. Ejiri, M. Kitazawa, H. Suzuki, N. Wakabayashi, “Phase structure

- and critical point in heavy-quark QCD,” PoS
(LATTICE 2022), 177 (2023),
DOI:10.22323/1.430.0177
- (4) K. Kanaya, M. Shirogane, S. Ejiri, R. Iwami, M.
Kitazawa, H. Suzuki, Y. Taniguchi, T. Umeda,
“Latent heat and pressure gap at the first-order
deconfining phase transition of SU(3) Yang-
Mills theory using the small flow-time
expansion method,” PoS (LATTICE 2021) 064
(2022), DOI:10.22323/1.396.0064
- (5) A. Kiyohara, M. Kitazawa, S. Ejiri, and K.
Kanaya, “Finite-size scaling around the critical
point in the heavy quark region of QCD,” Phys.
Rev. D 104, 1144509 (2021),
DOI:10.1103/PhysRevD.104.1144509
- (6) N. Wakabayashi, S. Ejiri, K. Kanaya, and M.
Kitazawa, “Scope and convergence of the
hopping parameter expansion in finite
temperature QCD with heavy quarks around the
critical point,” Prog. Theor. Exp. Phys. 2022,
033B05 (2022), DOI:10.1093/ptep/ptac019
- (7) S. Ejiri, S. Itagaki, R. Iwami, K. Kanaya, M.
Kitazawa, A. Kiyohara, M. Shirogane, T.
Umeda, “End point of the first-order phase
transition of QCD in the heavy quark region by
reweighting from quenched QCD,” Phys. Rev.
D 101, 054505 (2020),
DOI:10.1103/PhysRevD.101.054505
- (8) R. Iwami, S. Ejiri, K. Kanaya, Y. Nakagawa, D.
Yamamoto, T. Umeda, “Multipoint reweighting
method and its applications to lattice QCD,”
Phys. Rev. D 92, 094507 (2015),
DOI:10.1103/PhysRevD.92.094507
- (9) H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, K. Kanaya, Y.
Nakagawa, H. Ohno, K. Okuno, T. Umeda,
“Histograms in heavy-quark QCD at finite
temperature and density,” Phys. Rev. D 89,
034507 (2014),
DOI:10.1103/PhysRevD.89.034507