

Logarithm conformation representationによる 圧縮性流体方程式の導出と数値計算

中澤 嵩

金沢大学 学術メディア創成センター

1. はじめに

圧縮性流体場の特徴的な物理現象として最も代表的なものとして、衝撃波と境界層乱流との相互干渉である Shock Wave Boundary Layer Interaction (SWBLI) が挙げられる。この SWBLI は境界層乱流よりも遥かに複雑な乱流場となっていることから、結果的に空気抵抗が増大すると言われており、SWBLI の最適制御は高速流体機器の抵抗低減化に必要不可欠である。

H. Ozawa et al. (1) は、衝撃波が発生する箇所に Bump を設けることで衝撃波の分布が変形し、SWBLI の構造に影響を与えることを発見しており、この Bump のことを Shock Control Bump (SCB) と呼称している。また、K. Mazaheri et al. (2) や E. Jinks et al. (3) は、代表的な 2 次元翼断面である RAE2822 において揚抗比や圧力の最小化問題を解くことで SCB の設計を行い、SWBLI が抑制されていることを数値的に示している。しかしながら、これらの先行研究では SCB の形状を高々数個程度の媒介変数で設定したパラメトリックな最適設計を行っており、SWBLI の正確な物理現象を十分に考慮している訳ではない。

一方、本研究構想では全ての自由度を用いる随伴解析を基礎技術とする形状最適化問題を採用することで、対象としている物理現象に対して忠実な最適設計を目指している。ところが、圧縮性流体の数値計算には SWBLI を解像する必要があるため、伴う膨大な計算コストを必要とする。例えば、空間刻み Δx は 10^{-3} 程度が、時間刻み Δt は 10^{-6} 程度が一般に用いられる。また、格子点数は 1 次元で 10^4 、2 次元で 10^8 、3 次元で 10^{12} 程度を必要とする。そして、形状最適化問題を解くことを想定すると数十回の順問題を解く必要があり、

この点において圧縮性流体場の膨大な計算コストが致命的となる。

圧縮性流体の数値解析において物理量が不連続に変化する現象をどのように扱うかが問題となり、現在までに Gudunov 法を原型として様々な近似リーマン解法及び高次多項式による空間再構築を中心に研究が行われてきた (4)。このような解法は、数値振動を抑制するための制限関数・人工粘性といった共通点を持っており、MUSCL や WENO、AUSM といった手法が提案されている。しかし、制限関数・人工粘性が数値拡散の原因となり、衝撃波や接触不連続面の界面を鈍らせる結果につながる。このような数値的な課題を回避するために、 $\tanh$ 関数によって不連続な物理量を近似することで数値拡散を抑制する THINC 法が F.Xiao et al. (5) によって提唱されている。近年では高忠実・非散逸な数値計算手法として、人工粘性を用いずに、運動エネルギーとエントロピーを高精度に保存させる KEEP スキームが提案され (6)、MHD 乱流や燃焼乱流の数値シミュレーションに活用されている。

これらの先行研究で扱われてきた数値計算スキームにおいて、時間刻み Δt は全空間で一定値を取る必要があるため、空間方向の計算コストを如何に抑制できるかといった点が、計算コスト抑制に向けた解決の糸口となり得る。そこで本研究では、SWBLI を解像可能な高い計算精度と形状最適化問題を現実的な計算時間で実行可能な低い計算コストを両立する数値計算手法を構築し、圧縮性 Navier-Stokes 方程式に適用する。

SCB の最適設計は抵抗低減に留まらず、航空機設計にとって重要な役割を果たす。航空機が運航時に迎角を上げると翼面上で SWBLI が発生し、

それに伴い衝撃波後方の境界層が乱流場の振動により剥離し、その結果として境界層と衝撃波が時間周期的に干渉する現象をバフエット現象と呼ぶ。このバフエット現象は主翼にかかる応力を時々刻々変化させるため、機体の振動や翼の損傷、操縦性の悪化、構造設計への悪影響等が懸念されている。そこで、本研究構想で構築する形状最適化問題が SWBLI の抑制による抵抗低減化に役立つことが実証されれば、バフエット現象の自励振動を抑制する道筋が立つ。

2. 数理・計算モデルの構築

圧縮性流体を扱う研究分野では、保存系の方程式を用いることが一般的である。その理由は、密度・運動量・内部エネルギー・運動エネルギー・エントロピー・エンストロフィー等の物理量を保存させるためには、発生した衝撃波の数値フラックスを高精度に評価する必要があり、保存系圧縮性 Euler 方程式を有限体積法や不連続ガラーキン法、KEEP スキーム等を用いて離散化することで実現することが可能であると、多くの数値計算結果から裏付けられているからである。ところで、保存量は密度 ρ ・速度 $\mathbf{u}$ ・圧力 p で構成されていることから、 ρ 、 $\mathbf{u}$ 、 p を保存させることが可能な非保存系圧縮性 Euler 方程式を解くが可能であれば、保存量もまた保存させることが可能となる。しかし、非保存系圧縮性 Euler 方程式では数値フラックスを精度よく解像することは一般に困難であり、数値振動・オーバー/アンダーシュートが発生し、妥当な数値計算結果が得られないとされてきた。

このような圧縮性流体場の数値計算に関する大きなトレンドにあって申請者は、保存系圧縮性 Euler 方程式から導出した新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式 (Table 1 参照) に対する数値計算スキームを開発することにした。この新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式は、保存系圧縮性 Euler 方程式と同一のリーマン不変量を持つことが示されており、その利用に数学的な矛盾は生じない。

その上で、従来手法で用いられてきたような数学的な妥当性が全く与えられていない制限関数・人工粘性を用いず、微分幾何や変分問題、誤差解析、数値解析等の数理科学を基礎学問とする技術を全面的に採用した新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式に対する数値計算スキームを構築した代表的なテスト問題の一つである 1 次元 Sod Shock Tube Problem に適用したところ、格子点数を 90% 削減しつつ、エネルギーを保存させることに成功し、厳密解とほぼ同様の密度・圧力・速度分布を有する数値解が得られ、その有効性を実証している。

Table 1 新規・非保存系の圧縮性 Euler 方程式

$$\begin{aligned}\rho \frac{Da_\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + p \nabla a_p &= 0, \\ p \frac{Da_p}{Dt} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

3. 研究方法

新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式 (Table 1 参照) を導出する過程で、密度 ρ と圧力 p に log を取った (LCR: Logarithm Conformation Representation)、 $a_\rho = \log \rho$ 、 $a_p = \log p$ 及び速度 $\mathbf{u}$ を未知変数としている。この LCR を採用することで、密度 ρ と圧力 p のオーダーを大幅に緩和することが可能となる。この LCR は、これまでレオロジーの分野で代表的な研究対象である非ニュートン流体の数値計算に対して積極的に用いられてきた。しかし、申請者が知る限り、少なくとも航空工学分野における圧縮性流体においては全く活用されてこなかった。このような経緯であるため、新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式に関する物理的な性質については、これまで全くと言っていいほど解析されることが無かった。

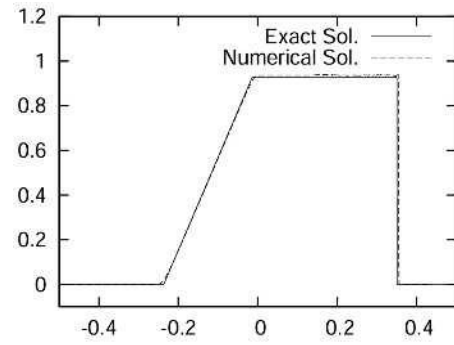
このような状況を鑑みて、新規・非保存系圧縮性 Euler 方程式に対して、位相速度・適合方程式・

リーマン不変量といった物理的な性質が、保存系圧縮性 Euler 方程式と一致することを示した。その結果、適切な数値計算手法を構築することで、保存系圧縮性 Euler 方程式を用いた先行研究と同一な結果が得られるのではないかと考えられた。本研究構想では、FreeFEM++にインプリメントされている Adaptive Mesh Refinement (AMR) ソルバーを活用する。この AMR ソルバーは、応用数学者の P. J. Frey and F. Alauzet (7) や A. Loseille and F. Alauzet (8) によって提案され、有限要素法における誤差である 2 回微分項を最小化させるようにアルゴリズムが構築されている Anisotropic AMR ソルバーであり、“エッジの方向”は Streamline に沿わせ、“エッジの長さ”は応力集中している領域で小さく取することで、物理量の 1 回微分を高精度に近似することが可能となる。

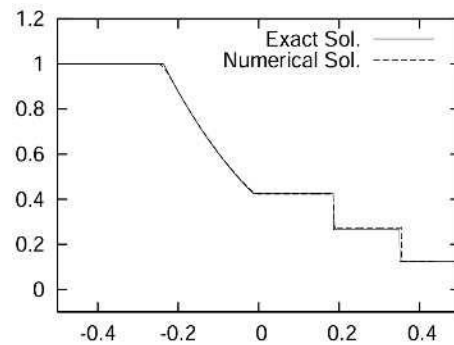
物質微分の近似には Semi-Lagrange Method (SLM) を採用する。この SLM は時刻 $t^n = n\Delta t$ の速度 $\mathbf{u}^n$ から Δt 上流の物理量を算出することで物質微分を数値的に近似するスキームとなっている。LCR や AMR と併用することで、“エッジの方向”は Streamline に沿うため Δt 上流の座標はエッジの近傍に存在することになり、更には衝撃波の界面付近のように数値計算精度を要求するような領域であっても、“エッジの長さ”が小さく設定されるため、高精度に物質微分を近似することが可能となる。

4. 数値計算結果：圧縮性 Euler 方程式

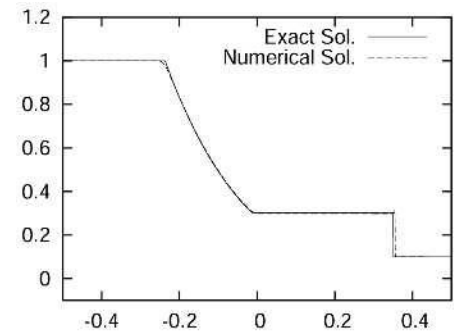
上記で詳述した LCR と AMR、更には SLM を組み合わせた数値計算手法を開発し、圧縮性 Euler 方程式における代表的なテスト問題である 1 次元 Sod Shock Tube Problem に対して適用し、厳密解と比較して良く一致していることを確認している (Fig.1)。更に、有限要素メッシュを固定した場合と AMR を用いた場合を比較して、格子点数を 10 分の 1 に抑えることに成功しており、この点は形状最適化問題を解く際に順問題の計算時間を抑制できるため極めて重要な知見であった。



(a) 密度



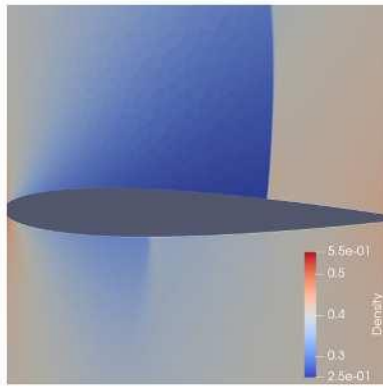
(b) 速度



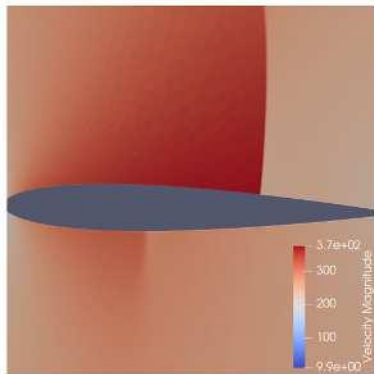
(c) 圧力

Fig.1. 1 次元 Sod Shock Tube Problem

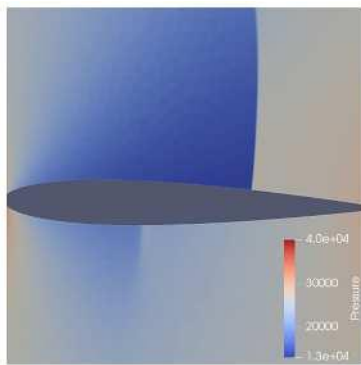
更に、マッハ数 0.8・迎角 1.25 における NACA0012 周り Euler 流れ (Fig.2) に対して適用し、翼周りの c_p コンターや c_d 値や c_l 値等が先行研究 (9) と比較して良く一致していることを確認している。



(a) 密度



(b) 速度の絶対値



(c) 圧力

Fig.2. NACA0012 周りの Euler 流れ

5. 数値計算結果：圧縮性 Navier-Stokes 方程式

Fig.3 は $Re = 200, t = 1$ における 2 次元 Viscous Sod Shock Tube Problem の数値計算結果であり、G. Zhou et al. (PoF, 2018) と同様の結果が得られた。格子点数は固定メッシュの場合には 4.5×10^6 程度となるが、AMR を採用することで 2×10^5 程度までに削減することが出来た。しかし、シングルスレッドでは計算時間が膨大となるため、大阪大学 D3 センター SQUID を用いて大規模並列計

算を行った。その際、計算に必要なスペックとしては、20 Core・120GB Memory・600 時間を要したが、 $Re = 500, 750, 1000$ においては更に複雑な乱流場が発生することから計算コストの増加が予想された。



(a) 密度



(d) 温度

Fig.3. 2 次元 Viscous Sod Shock Tube Problem.

参考文献

- (1) H. Ozawa et al., AIAA Journal, (2008).
- (2) K. Mazaheri et al., Aerospace Sci. and Tech., (2015).
- (3) E. Jinks et al., Aerospace Sci. and Tech., (2018).
- (4) 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版, (1994).
- (5) F. Xiao et al., Int. J. Num. Meth. Fluids, (2005).
- (6) Y. Kuya et al., J. Comp. Phys., (2018).
- (7) P. J. Frey and F. Alauzet, Com. Methods in appl. Mech. and Eng., (2005).
- (8) A. Loseille and F. Alauzet, SIAM J. on Num. Anal., (2011).
- (9) Y. Nishimura et al., JAXA-SP, (2011).